



## Определение коэффициента сопротивления трапов гидравлико-математическим методом

DOI

Д-р техн. наук, профессор  
**Н.Д. Гайденок** – Сибирский  
 федеральный университет,  
 г. Красноярск  
 @ ndgay@mail.ru

**Ключевые слова:**  
 трап, сила сопротивления  
 воды, сопротивление трения,  
 сопротивление давления,  
 коэффициент сопротивления,  
 уравнение Бернули, инверсия  
 контура тела, местные  
 сопротивления, падение  
 напора, динамическое  
 давление, пограничный  
 слой, присоединенная масса,  
 вариационное исчисление,  
 оптимальное управление,  
 Диоды, задача Больца,  
 многокритериальная задача,  
 метод Галеркина

**Keywords:**  
 trawl, water resistance force,  
 friction resistance, pressure  
 resistance, resistance coefficient,  
 Bernulli equation, body contour  
 inversion, local resistances,  
 pressure drop, dynamic pressure,  
 boundary layer, join mass,  
 calculus of variations, optimal  
 control, Dido problem, Bolts's  
 Task, multi-criteria problem,  
 Galerkin method

### DETERMINATION OF THE DRAG COEFFICIENT OF TRAWLS BY THE HYDRAULIC-MATHEMATICAL METHOD

Doctor of Technical Sciences, Professor N.D. Gaidenok – Siberian Federal University,  
 Krasnoyarsk

The paper considers the features of determining the determination of the force and coefficient of water resistance to the movement of trawls and other floating bodies by the hydraulic-mathematical method by inverting the body contour based on the law of conservation of energy in the form of a solution in the special case of the Dido problem and the multi-criteria problem of the calculus of variations or optimal control in the general case. The proposed algorithm makes it possible to clearly take into account a wide range of hydro-mechanical phenomena that determine this important indicator, which is necessary for the development of an optimal trawling strategy

### ВВЕДЕНИЕ

В связи с развитием экономической деятельности человечества наблюдается и взаимопроникновение ее в на первый взгляд далекие друг от друга области. Хотя, естественным образом в работе нет стремления изложить весь перечень выше отмеченных контактов, тем не менее отметим один довольно актуальный пример, касающийся, как это ни странно, возможности применения орудий и технологий рыболовства в такой бизнес-сфере как туризм. Точнее, его оборотная сторона, ставшая уже лимитиру-

ющим фактором – загрязнение и очистка акватории и пляжей от различных видов упаковки – от пищевых продуктов до одноразовой посуды (рис. 1).

Кроме того, не следует удивляться тому, что в акватории, хотя и не том объеме, присутствуют объекты существенное и габаритнее пищевых стаканчиков – обломки мебели, инвентаря и т.д. Все это значительно корректирует параметры технологии.

Положение дел здесь заключается в том, что, прежде чем пластик оказывается на пляжах, он легальными и, в большей сте-

пени, нелегальными путями попадает в не столь отдаленные от пляжей акватории тропических морей Полинезии. Поэтому реальным мероприятием по снижению объемов его выброса является банальное трапление близлежащей акватории.

Но особенности технологии трапления пластика далеко не в полной мере соответствуют особенностям классической технологии рыболовства – как минимум плотность и параметры трения трапов будут различными. Сюда добавляется еще необходимость транспортировки наполненного трапа к месту выгрузки – это обусловлено повышением эффективности очистки за счет снижения затрат на перегрузку.

Естественным образом в список затрат входит еще много статей. Поэтому, в сравнительно полном виде экономико-математическая модель комплекса процессов «Трапление – Транспорт» имеет следующий вид [8]:

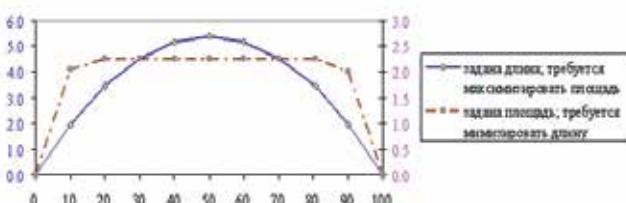
$$S = C_1 T^{1/5} V^{-1} + C_2 T^{-1} V^{-1} + C_3 T^{-1/3} V^2 \quad (1)$$

где  $S$ ,  $T$ ,  $V$  – общая сумма затрат, объем трапа, скорость трапления;  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  – величины затрат в  $S$ , отвечающие затратам на аренду тралищика, оплату труда экипажа и приобретение ГСМ.

Поскольку последний член, входящий в выражение (1) в цитируемой работе представлен в традиционной форме перевозки на судах, то применимость ее к трапам справедлива только в виде первого приближения.



**Рисунок 1.** Вид пляжа о. Бали (интернет, свободный доступ)  
**Figure 1.** View of the beach of Bali (Internet, free access)



**Рисунок 2.** Варианты решения изопериметрической задачи  
**Figure 2.** Options for solving the isoperimetric problem

В работе рассмотрены особенности определения силы и коэффициента сопротивления воды движению трапов и прочих плавающих тел гидравлико-математическим методом, путем инверсии контура тела на основе закона сохранения энергии, в виде решения, в частном случае, задачи Диодона и многокритериальной задачи вариационного исчисления или оптимального управления в общем случае. Предложенный алгоритм позволяет в ясной форме учитывать широкий спектр гидромеханических явлений, обуславливающий данный важный показатель, необходимый для разработки оптимальной стратегии трапления.

Действительно, показатель степени при  $T$  после ряда преобразований соответствует величине смоченной боковой поверхности судна и отражает только вклад сопротивления трения в общее сопротивление.

Однако в общее сопротивление входят еще две статьи – сопротивление формы (давления) и волновое сопротивление.

Если задача определения волнового сопротивления решена Н.Е. Жуковским [2], то в плане определения величины сопротивления формы ситуация не столь радужная – избегая изложения обширного списка чисто гидромеханических и гидродинамических проблем, отметим тот факт, что все упирается, в конечном итоге, в имеющуюся на настоящий момент времени стадию разработки теории турбулентности, которая далека от уровня практических инженерных приложений – ряд авторских моделей уровня степени доктора физико-математических наук, требующих, не говоря уже о доскональном знании процессов, существенных вычислительных и технических ресурсов, о чем, по вполне понятным экономическим причинам, авторы коммерческих гидромеханических программных пакетов не спешат делятся в рекламных проспектах.

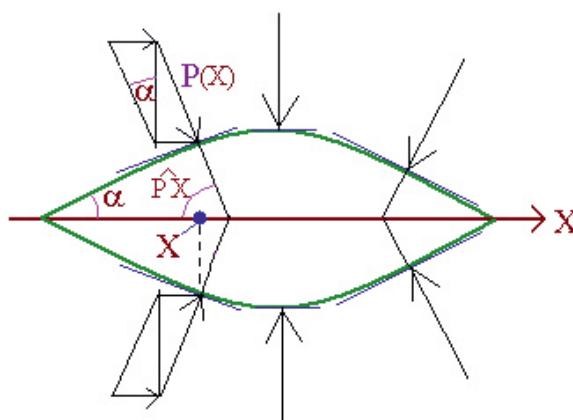
Поэтому в задачи данного исследования входят разработка в известной степени альтернативного метода построения формы плавающего тела, имеющего минимальную силу сопротивления воды его движению.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В качестве экспериментальной базы используется прогон моделей в бассейне. К числу методов относятся результаты исследований по гидравлике, гидромеханике, теории минимизации – нелинейное программирование, вариационное исчисление и оптимальное управление.

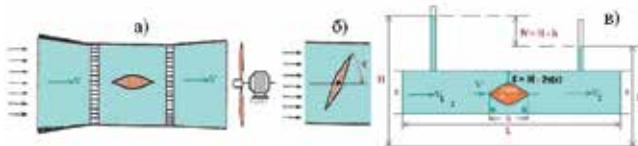
## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В соответствии с незавершенностью разработки теории турбулентности до уровня практических инженерных приложений и существующей, пока еще в виде ряда авторских задач, возникает необходимость привлечения альтернативных подходов. Для решения вопроса оптимизации формы плавающего тела обратимся к области



**Рисунок 3.** Распределение давления жидкости вокруг тела

Figure 3. Pressure's Distribution of Water around the Body



**Рисунок 4.** Схема аэродинамической трубы, дроссель-клапана и отрезка трубопровода

Figure 4. Wind tunnel diagram, throttle valve and pipeline cutout

гидравлики, имеющей солидный теоретический аппарат для решения сугубо практических задач, касающихся главного препятствия на пути эффективности вычислительных методов – структуры общего фрейма гидромеханических явлений и, в частности, структуры составляющих давления или напора, если оперировать терминами гидравлики.

Однако перед тем как перейти к анализу составляющих давления, необходимо рассмотреть особенности разработки алгоритмов построения формы тел с минимальным сопротивлением, дающим представление общего плана минимизации на основе существующих разработок в областях гидромеханики и решения оптимизационных задач – фрейм задачи.

Здесь главнейшим и парадоксальным, в плане вышеизложенного, является вопрос о полезной нагрузке, которую способно нести тело. Действительно, по крайней мере нулевым сопротивлением формы обладает тело нулевой ширины и осадки или диаметра – прямая линия. Актуальность полезной нагрузки лучше всего иллюстрируется на примере космической ракеты, где полезная нагрузка составляет первые проценты (м.б. и доли процентов) от всего двузначно тоннного веса тела вращения [12], вспомним вес и число космонавтов на борту.

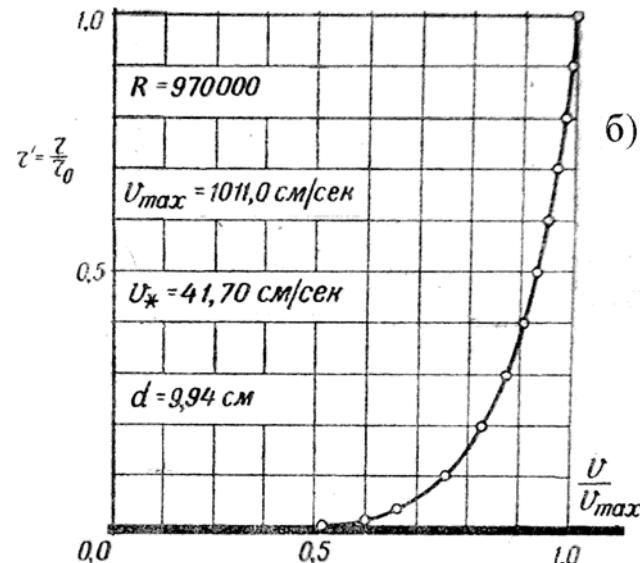
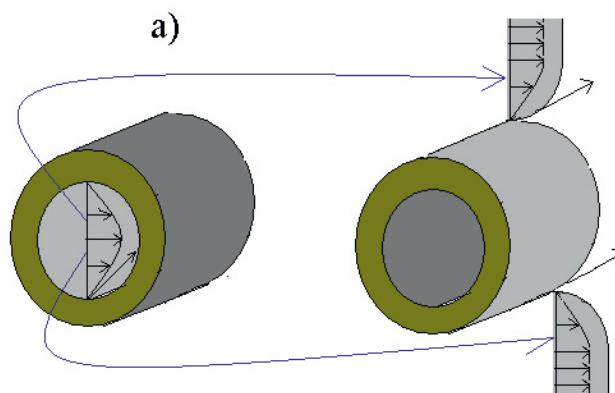
К числу объектов, для которых как бы маскируется значимость полезной нагрузки следует

отнести, пожалуй, иглы, стрелы и прочие спортивные, боевые снаряды и подобное техническое оборудование – им достаточно донести самих себя.

Поэтому, из вышеизложенного следует, что главный критерий из многочисленного перечня – тело должно иметь объем (площадь при поперечном обтекании), принадлежащую заданному интервалу значений.

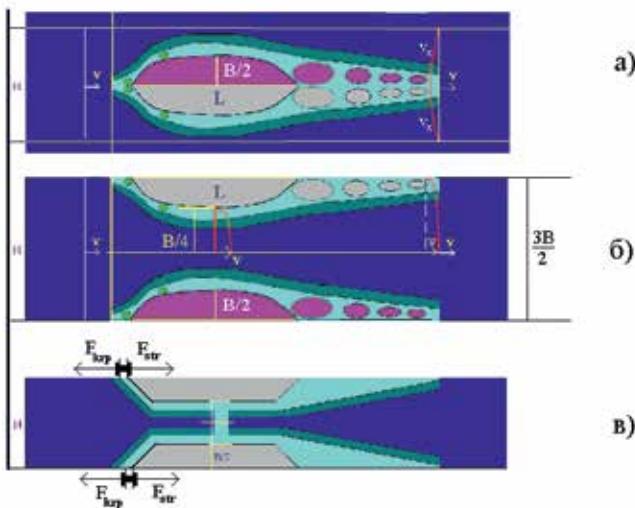
Полученный вывод сразу определяет изопериметрический тип задачи, с которым ассоциируется еще античная Задача Диони [1; 19] – огородить максимальную площадь линией с заданной длиной. Ее актуальность далеко не вербальная – на изготовление трала требуется сеть, тросы конкретной длины.

Однако здесь имеется расхождение вариантов решения данной задачи, в зависимости от того, что задано:



**Рисунок 5.** Инверсия внутренней поверхности трубы в наружную (а); распределение скоростей в трубе при турбулентном режиме (б) по [15]

Figure 5. Inversion of the inner surface of the pipe to the outer surface (a); velocity distribution in the pipe in the turbulent mode (b) according to [15]

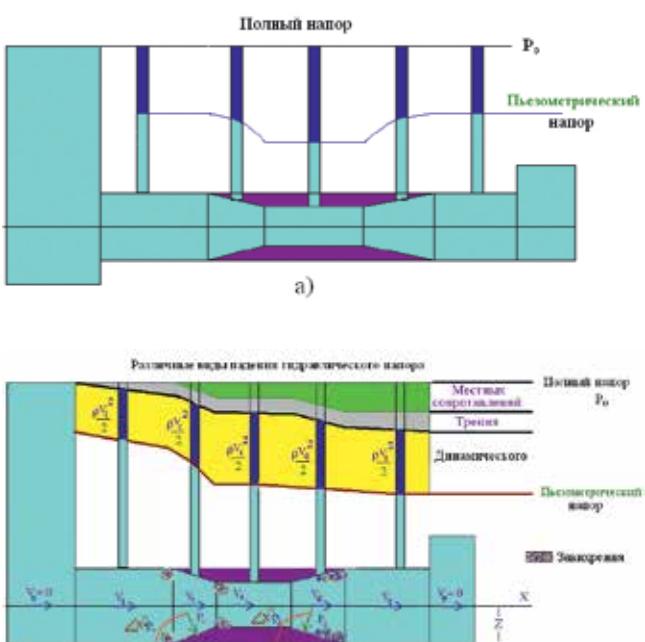


**Рисунок 6.** Инверсия корпуса тела  
**Figure 6.** Inversion of the body body

1. Задана длина и ищется площадь;
2. Задана площадь и ищется длина.

Варианты решения показаны на рисунке 2. Если в первом случае мы имеем определенный сегмент окружности, то во втором – тело, форма которого стремится, как минимум, к трапеции и даже к прямоугольнику.

Прежде чем переходить к анализу гидромеханических особенностей силы сопротивления воды движению тела – важного, второго по значимости, но все же подчиненного критерия задачи минимизации, сделаем два необходимых замечания:



**Рисунок 7.** Структура составляющих давления/напора  
**Figure 7.** Structure of pressure/head components

- минимальная площадь поверхности (длина контура тела) – одна из составляющих силы трения, которой оно пропорционально и которой обладает окружность или сфера соответственно;

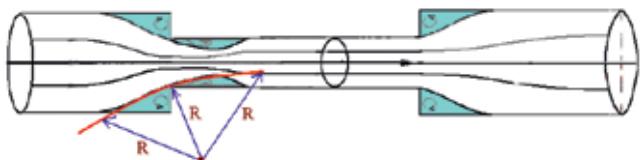
- минимальная сила волнового сопротивления, в соответствии с исследованиями Н.Е. Жуковского [7], наблюдается в том случае, когда контур тела описывается полиномом второго порядка – сегментом окружности в конкретном случае.

Реализовав необходимые замечания, освещающие фрейм задачи минимизации, вернемся к анализу гидромеханических особенностей силы сопротивления воды движению тела.

Интерес к структуре давления обусловлен тем фактом, что практически из всех методов определения силы сопротивления или ее индекса – коэффициента сопротивления  $C_x$  – доскональный учет геометрии тела возможен только в «ненимном» трех общепринятых методов [2]:

- Мариотта – непосредственное измерение силы динамометром;

- Гемгольца – метод импульсов;



**Рисунок 8.** Локализация областей завихренности  
**Figure 8.** Localization of vorticity regions

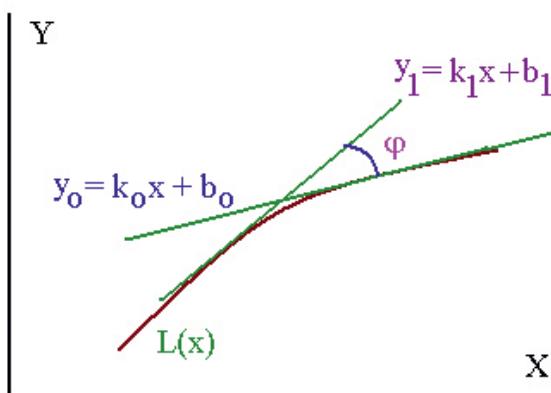
- посредством вычисления результирующей силы давления  $R_x$ , действующего на тело в жидкости (рис. 3) в виде интеграла (1).

$$R_x = 2 \int [P(X) \cos(\hat{P}X) dL(X)], X \in [0, \pi], \quad (1)$$

где  $P(X)$  – сила давления, действующая на тело в точке  $X$ ,  $\hat{P}X$  – угол между вектором  $P(X)$  и осью  $X$  [2].

Соответствующее распределение составляющих давления является, в первую очередь, объектом исследования гидравлики, имеющей солидный арсенал для решения сугубо практических инженерных задач. Мы рассмотрим гидравлическую модель объекта исследований, поскольку подавляющее большинство исследований по изучению силы сопротивления проводится в аэродинамических трубах (рис. 4а) или бассейнах, которые представляют собой не более чем отрезок трубопровода с перепадом давления на концах (рис. 4б) и наличием потерь напора на трение и местные сопротивления [17].

Причем, местные сопротивления представлены техническим устройством типа «Дроссель-клапан» (рис. 4б) и выражение для радикального показателя, в плане определения силы сопротивления, – падения напора для рисунка 4в име-



**Рисунок 9.** Определение угла  $\phi$

**Figure 9. Determining the angle angle  $\phi$**

ет вид (2) [4], – смысл обозначений приводится ниже:

$$H = H - h = (V^2 2 - V^2 1) / 2g + (\lambda L / S + \xi_{dev}) V^2 / 2g \quad (2)$$

Однако, несмотря на чисто внешнее подобие и самое удивительное – полную эквивалентность, вышеупомянутым замечаниям относительно сил трения и волнового сопротивления, гидравлика для рассматриваемого типа устройств из раздела «Местные сопротивления» [17; 22] большего, чем величина коэффициента падения напора для дроссель-клапана, причем без каких бы то ни было отношений к его форме, дать не может.

Поэтому следующим шагом на пути детерминации типа устройства является демонстрация эквивалентности, в плане гидромеханических явлений самого тела и его инверсного образа (рис. 5). Тем более, что в работе [13], на примере продольного обтекания цилиндра, явно указывается на соотношение  $C_x$  и расходного коэффициента при вытекании из цилиндрического насадка, которое равно 2.

Кроме того, вся модификация классических уравнений Навье – Стокса, которые сами по себе являются не более чем выражением интерполяции между гидромеханическими феноменами, в плане разработки конкретных выражений для турбулентной вязкости, при расчете обтекания контура тела, сводится к привлечению результатов исследований движения жидкости в трубах, проведенных немецким исследователем грузинского происхождения И.И. Никурадзе под руководством Л. Прандля еще в 1932 г. [14; 16; 18; 20; 21].

Продолжая процесс инверсии достаточно легко определим тип устройства, которое:

- отражает гидромеханические особенности обтекаемого тела;
- включает геометрические особенности устройства.

Для этого разрежем тело, представленное на рисунке 2, вдоль килевой оси – ось X – и сопостав-

шим разрезанные части выпуклыми сторонами зеркальным образом (рис.6а, б). На рисунке 6б легко определяется такое техническое устройство, как сопло; а на рисунке 6в – его техническая трансформация, сочленения таких устройств, как конфузор и диффузор [17; 22].

Здесь гидравлика уже дает, пусть не в той мере как требуется, выражения, использующие геометрические параметры устройства, особенно в отношении расчета падения напора в диффузоре [17; 22].

Но главное, что гидравлика предоставляет детальную структуру составляющих давления/напора (рис. 7а) – идеальная жидкость без трения; рисунок 6б – реальная жидкость, где уже имеются потери напора на трение и геометрия устройства.

Для всех типов устройств, показанных на рисунке 6, справедливо уравнение Бернулли, отражающее Закон сохранения полной энергии (3)

$$Z + P/\rho g + V^2/2g + h = \text{const}, \quad (3)$$

$$h = \xi V^2/2g,$$

где  $Z$ ,  $P$ ,  $V$ ,  $h$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $\xi$  – средний уровень, давление, скорость течения жидкости, потери напора, плотность жидкости, ускорение свободного падения и коэффициент падения, зависящий от геометрии и шероховатости контура. Причем  $\xi$  традиционно делятся на два типа –  $\xi_{fr}$  трения и  $\xi_{dev}$  типа устройства, где последние относятся к разделу «Местные сопротивления».

Далее, как показывает теория гидромеханики, потери напора в рассматриваемом устройстве обусловлены трением и завихренностью, связанной с его геометрией, а именно – изменением углов наклона его контура.

Действительно, как видно из рисунка 7б и рисунка 8, области завихренности локализованы в местах резкого изменения величин углов контура или первых производных. Сами же величины углов  $\phi$ , определяемые по выражению (4):

$$\operatorname{tg} \phi = [k_o - k_1] / [1 + k_o k_1] \approx d^2 L(x) / dx^2 = y'', \quad (4)$$

$$k_o = dy_o / dx, \quad k_1 = dy_1 / dx,$$

где  $k_o$ ,  $k_1$  – тангенсы углов наклона касательных, определяющих угол  $\phi$ , являются по сути дела ничем иным, как вторыми производными от контура тела  $L(x)$  (рис. 9) – определяющими гладкость или кривизну контура. Отсюда сразу получается содержание второго критерия задачи минимизации – минимальному сопротивлению соответствует минимальная кривизна контура, что, как следует из гидравлической практики, имеет сопло по сравнению с устройством «конфузор – диффузор» (рис. 6).

Наглядно влияние кривизны контура показано на рисунке 9, где добавление гладких фрагментов в начало и конец прямоугольника снижает величину сопротивления на 72%.

Для получения детального описания влияния кривизны, в теории гидромеханики содержатся выражения для различного типа «колен» – без закругления и с закруглением (рис. 11), имеется [17, 22]:

$$\xi_{ko} = 0.946 \sin^2 \phi / 2 + 2.047 \sin^4 \phi / 2 \quad (5)$$

$$\xi_{kk} = [0.131 + 0.163(d/R)^{3.5}] / [\pi/2] |\phi|,$$

где значение  $\phi$  берется по абсолютной величине, которую в выражении (5.1) можно не использовать, ибо она компенсируется четными степенями.

Однако в выражении (5.2) присутствует член  $d/R$ , величину которого, для рассматриваемой модели колена, определим из рисунка 11 и соображения того, что в качестве значения  $R$  можно взять половину длины тела плюс полуширина мидельного сечения.

Оценку величины  $d$  получим из анализа рисунка 12, где показаны особенности обтекания настоящих кораблей в виде показателя  $S$ , для которого среднее значение отношения  $k$  к  $B$  равно 0,173 или  $\sim 1/6$ . Отношения ширины  $B$  к длине  $L - B/L$  – и осадки  $T$  к ширине  $B - T/B$  – для судов находятся в интервалах  $1/6 - 1/12$  и  $1/4 - 2/5$ . Тогда величина отношения  $d/R$  имеет порядок  $\sim 1/30$  и лежит в интервале  $1/25 - 1/40$ . Следовательно, в выражении (5.2) в скобках остается только первый член.

Далее, как показывают результаты обработки контуров хорошо обтекаемых тел и вычислительных экспериментов, абсолютная величина среднего значения второй производной для контура тела лежит в интервале 0,003-0,007. Поэтому в данном случае справедливо классическое равенство (6):

$$\phi \approx \sin \phi \approx \operatorname{tg} \phi = d^2 Y / dx^2 = y'', \phi \rightarrow 0 \quad (6)$$

В соответствии с вышеизложенным и тем, что  $d/R \ll 1$ , выражения (5) предстанут в виде (7):

$$\xi_{ko} = 0.946 \sin^2 \phi / 2 + 2.047 \sin^4 |\phi| / 2 \approx 0.25 y''^2 \quad (7)$$

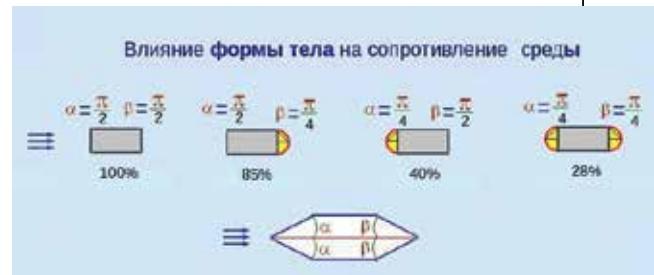
$$\xi_{kk} = [0.131 + 0.163(d/R)^{3.5}] \phi / [\pi/2] \approx 0.0834 |y''|$$

Однако, как выражения (5.1), так и (5.2) практически эквивалентны, в актуальной для нахождения, оптимальной форме интервалов параметров (рис. 12.а). Кроме того, в соответствии с (6), полностью справедливо все выражение (7.1) (рис. 12.б).

Полученный результат актуален, когда выражения (4.1) или (7.1) эффективны для проведения аналитических преобразований, а выражения (5.2) или (7.2) – в численных расчетах.

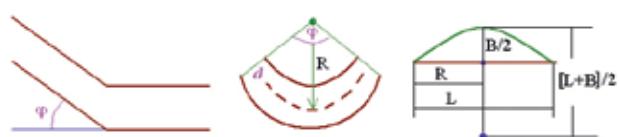
Однако самым главным достоинством выражений (5)-(7) является факт того, что их, при соответствующей модификации, – взаимосвязь переменных  $d$ ,  $R$  и  $\phi$  – можно использовать при описании потери напора при различных типах расширений или сужений.

Они позволяют перейти от интегрального характера описания к дифференциальному, позво-



**Рисунок 10.** Влияние формы тела на сопротивление среды на величину силы сопротивления (интернет, свободный доступ)

Figure 10. Influence of the body shape on the value of the resistance force (Internet, free access)



**Рисунок 11.** Типы колен и оценка  $R$

Figure 11. Knee types and  $R$  rating

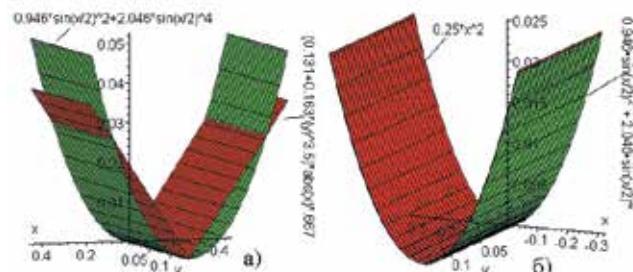


**Рисунок 12.** Движение кораблей (интернет, свободный доступ)

Figure 12. Ship traffic (internet, free access)

ляющему в детальной степени отражать геометрию устройств и явлений.

Рассмотрим теперь выражения коэффициента падения напора для трения  $\xi_{fr}$ . В классической форме он имеет вид (8):



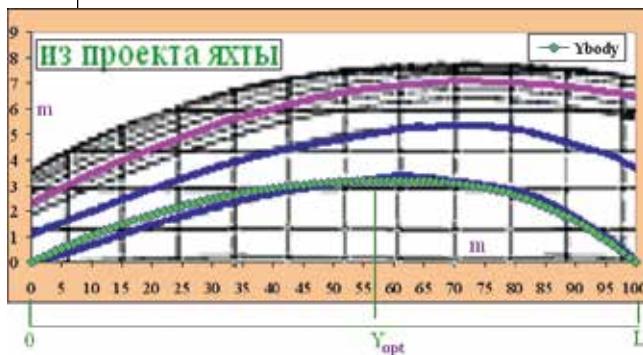
**Рисунок 13.** Графический образ (5) и (7.1)

Обозначения: оси  $x \leftrightarrow y'', y \leftrightarrow d/R$ ;

ось  $z \leftrightarrow \xi_{dev}$

Figure 13. Graphic image (5) and (7.1)

Notation: axes  $x \leftrightarrow y'', y \leftrightarrow d/R$ ; axis  $z \leftrightarrow \xi_{dev}$



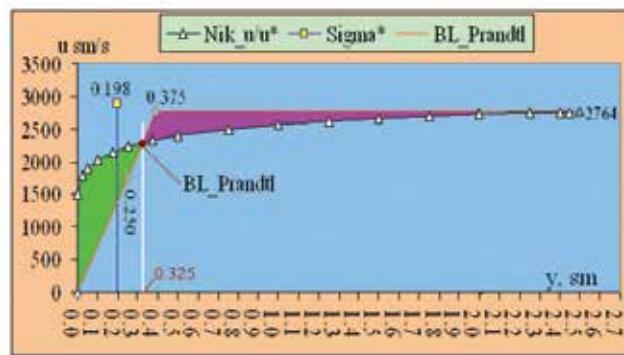
**Рисунок 14.** Иллюстрация решения задачи (9)

Figure 14. Illustration of the solution of the problem (9)

$$\xi_{fr} = \lambda L / 4R = \lambda L / D, \lambda = 8g / C^2, C = 87 / (1 + \gamma / R^{1/2}), R = D / 4 \quad (8)$$

где  $L$ ,  $D$ ,  $R$ ,  $\lambda$  и  $C$  – длина участка поверхности трения, диаметр трубы, гидравлический радиус и коэффициенты в квадратичных формулах падения напора по формулам Дарси и Базена [17; 22].

Теперь, объединяя выражения (1)-(8), мы можем представить нахождение минимального значения (2) в виде задачи оптимального



**Рисунок 15.** Иллюстрация определения  $\delta^*$  по Л. Прандтлю

Figure 15. Illustration of the definition of  $\delta^*$  by L. Prandtl



**Рисунок 16.** Модель корабля

Figure 16. Ship model

управления, которую можно также представить как задачу Больца из вариационного исчисления [1; 19]:

$$dU(x)/dx = m(x)$$

$$dY(x)/dx = U(x)$$

$$dS(x)/dx = Y(x)$$

$$dC(x)/dx = \frac{1}{2}\xi k^* d^2Y/dx^2 V^2(Y(x)) = \frac{1}{2}\xi k^* m V^2(Y(x)) \quad (9)$$

$$dF(x)/dx = \frac{1}{2}\xi_{fr}(x) V^2(Y(x))$$

$$dP(x)/dx = [P_o - \frac{1}{2}V^2(Y(x)) - C(x) - F(x)][dY/dx] = [P_o - \frac{1}{2}V^2(Y(x)) - C(x) - F(x)]U(x)$$

$$V(Y(x)) = Q/[H - 2Y(x)]$$

$$Z = [S(L) - S_o]^2 + P(L)^2 \rightarrow \min$$

где  $Q$  – расход среды;  $H$  =  $D$  – максимальный диаметр трубы;  $V(Y(x))$  – скорость среды в точке  $x$ ;  $S_o$  – заданный объем тела или площадь его поперечного сечения при поперечном обтекании и  $S(x)$  – текущие объем или площадь тела;  $Y(x)$  – ширина тела в точке  $x$ ;  $U(x)$  и  $m(x)$  – скорость и ускорение изменения  $Y(x)$ ;  $C(x)$  – падение напора за счет кривизны контура тела в точке  $x$  – (7);  $F(x)$  – падение напора за счет трения в точке  $x$  – (8);  $P(x)$  – фактическое давление среды в точке  $x$  – (2) и (3).

Наиболее оптимальным алгоритмом решения задачи (9) является такой представитель прямых методов решения краевых задач и задач вариационного исчисления, как метод Галеркина – Бубнова, реализуемый с помощью наиболее подходящего метода нелинейного программирования [3], где в качестве базисной функции используется выражение (10), представляющее собой качественный образ контура тела (см. рис. 6). Результаты решения задачи (9) показаны на рисунке 14.

$$Y(x, \alpha, \beta) = Y^{\max}[1 - \max(L_1, L_2)], \quad (10)$$

$$L_1 = \max(0, x/Y_{opt})^\alpha,$$

$$L_2 = \max(0, [(x - Y_{opt})/(L - Y_{opt})])^\beta,$$

## ВЫВОДЫ

Использование гидромеханической модели для определения параметров контура тела, обладающего минимальным сопротивлением, существенным образом не только облегчает формальное решение оптимизационной задачи (9), но и создает четкую и ясную гидромеханическую картину процесса, что позволяет использовать имеющиеся классические наработки.

Кроме того, модель (9) является открытой для внесения различных модификаций, типа учета

пограничного слоя [9; 14; 15; 16; 23], посредством введения новой переменной  $h(x)$ :

$$h(x) = Y(x) + \delta^*(x),$$

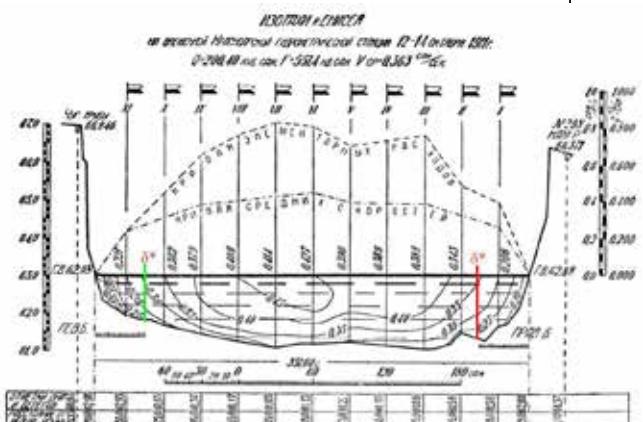
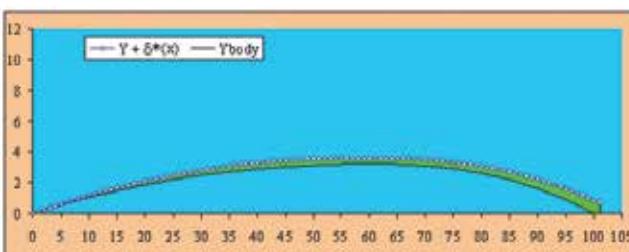
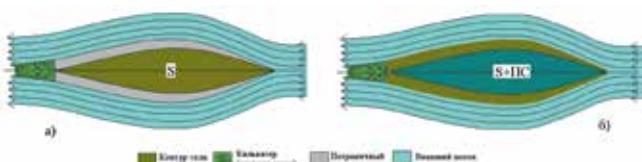
где толщина вытеснения  $\delta^*(x)$ , одной из характеристик пограничного слоя, определяется с помощью выражения [20]:

$$\delta^*(x) = 0.37(v/V(0))^{1/5} x^{4/5} \quad (11)$$

Включение в анализ феномена пограничного слоя преследует два аспекта: упрощение гидромеханической картины [15] и гидромеханически обусловленную возможность линеаризации задачи (9).

Сделаем пояснения к определению толщины пограничного слоя. Классически предлагается выделение по границе соотношения:

$$V(\delta)/V^{\max} \in [0.05, 0.01]$$



Однако Л. Прандтль [20] предлагал определять  $\delta$  там, где заштрихованные площади, выше и ниже кривой скоростей, равны между собой. Проведенные вычисления по алгоритму Л. Прандтля (рис. 15) показывают соотношение толщины вытеснения  $\delta^*$ , вычисляемой по выражению предложенному Т. Карманом:

$$\delta^* = \int_0^{\infty} (1 - V(y)/V_{\max}) dy \quad (12)$$

и общей толщины пограничного слоя  $\delta$ , полученного по данному алгоритму, соотносятся, как  $\approx 2/3$ , а не в виде классических  $1/8 \div 1/12$  (рис. 15).

В качестве порядковых оценок  $\delta^*$  можно использовать величину отношения  $\delta^*$  к радиусу турбулентного потока – полуширине поперечного сечения створа в случае рек, которое, согласно [9; 11; 14; 15; 16; 23], составляет  $1/12 \div 1/5$  при модальном интервале значений  $1/10 \div 1/7$ .

Учет пограничного слоя требует освобождения от иллюзии, заключающейся в том, что тело при движении в среде имеет те же геометрические параметры, например, элегантная модель корпуса корабля (рис. 16).

В реалии имеется тело, которое вместе с пограничным слоем представляет собой единое целое и является вместе с частью кильватерного течения (след) присоединенной массой тела, геометрический образ которых показан на рисунках 17 и 18, и материальная реализация (см. рис. 12). Применительно к решению (9)-(11) получаются следующие результаты (рис. 18). Легко представить мощность пограничного слоя для случая, аналогичного по параметрам шероховатости [3; 17; 22], например, каналу с валунами, заросшими макрофитами – здесь величина отношения  $\delta^*$  к радиусу турбулентного потока явно не будет меньше 1/5.

Здесь необходимо сделать следующее замечание: несмотря на формальное определение, пограничный слой находит свое материальное воплощение в гидробиологии и гидрографии. Например, для насыщенного каскадом завихреностей течения Верхнего Енисея (рис. 19), для которого, несмотря на наличие в работе [10] раздела «Ламинарное движение – вихревое движение», особенно на фарватере естественным образом более характерна категория турбулентного, толщина вытеснения, определенная на основе выражения (12), как правило, является границей локализации различных биологических сообществ, проходящей по экотону [6] (рис. 20).

Действительно, вычисленная по распределению изотах Енисея [5] (рис. 20), она совпадает с границами раздела высокопродуктивного прибрежного и угнетенного фарватерного биоценозов.

## ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

- Алексеев В.М. Оптимальное управление. / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – М., Наука, 1979. 432 с.
1. Alekseev V. M. Optimal control / V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin. - M., Nauka, 1979, – 432 p.
2. Алферьев М.Я. Ходкость и управляемость судов. Сопротивление воды движению судов – М.: Транспорт, 1967. – 344 с.
2. Alferyev M. Ya. Speed and controllability of vessels. Resistance of water to the movement of ships. -Moscow: Transport, 1967. – 344 p.
3. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с англ. / М. Базара, Л. Шетти – М.: Мир, 1982. – 584 с.
3. Bazara M. Nonlinear programming. Theory and algorithms: Translated from English / M. Bazara, L. Shetty-M.: Mir, 1982. - 584 p.
4. Бахметьев Б.А. О равномерном движении жидкости в каналах и трубах. – Л., 1931, – с. 200.
4. Bakhmetev B. A. On the uniform motion of liquid in channels and pipes. - L:, 1931, - p. 200.
5. Близняк, Зиринг. Материалы по описанию русских рек. Упр. Внутр. Водн. Путей МПС России, 1913, вып. XXXIII – Цит. по Бахметьев Б.А. О равномерном движении жидкости в каналах и трубах. – Л., 1931. – с. 50
5. Bliznyak, Ziring. Materials on the description of Russian rivers. Upr. Ext. Vodn. Paths of the Ministry of Transport of Russia, 1913, issue XXXIII-Cit. by Bakhmetev B. A. On the uniform motion of liquid in channels and pipes. - L:, 1931. - p. 50
6. Гайденок Н.Д. Эколого-промышленная характеристика нижнего бьефа Красноярского водохранилища / Н.Д. Гайденок, А.И. Пережилин. // Рыбное хозяйство. – 2013. – № 6. – С. 70-76.
6. Gaidenok N. D. Ecological and commercial characteristics of the lower reaches of the Krasnoyarsk reservoir / N. D. Gaidenok, A. I. Perezhilin. // Fisheries. - 2013. - No. 6. - Pp. 70-76.
7. Жуковский Н.Е. О спутной волне. В кн.: Гидродинамика. Собрание сочинений. – М., Л., 1949, – том 2. – С. 712-725.
7. Zhukovsky N.E. On the satellite wave. In: Hydrodynamics. Collected works. - M., L., 1949, - volume 2. - Pp. 712-725.
8. Зенер К. Геометрическое программирование и технологии проектирования. – М: Мир, 1973 Пер. с англ. – 112 с.
8. Zener K. Geometric programming and design technologies. - M: Mir, 1973 Per. s engl. - 112 p.
9. Карман Т. Некоторые вопросы теории турбулентности. Сб. Проблемы турбулентности. – М.-Л.: Изд-во ОНТИ НКТП, 1936. – С. 35-75.
9. Karman T. Some questions of the theory of turbulence. Sb. Problems of turbulence. - M.-L.: Publishing house ONTI NKTP, 1936. - Pp. 35-75.
10. Киселев П.Г. Гидравлика. Основы механики жидкости. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 424 с.
10. Kiselev P. G. Hydraulics. Fundamentals of fluid mechanics. - Moscow: Gos-energoizdat, 1963. - 424 p.
11. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. Пер. с франц. – М: Мир, 1968 – 176 с.
11. Conte-Bello J. Turbulent flow in a channel with parallel walls. Per. s frants. - M: Mir, 1968. -176 p.
12. Краснов Н.Ф. Аэродинамика тел вращения. – М.: Машиностроение, 1964. – 432 с.
12. Krasnov N. F. Aerodynamics of bodies of rotation. - M.: Mashinostroenie, 1964. - 432 p.
13. Милович А.Я. Теория динамического взаимодействия тел и жидкости. - М-Л.: Изд-во ОНТИ НКТП, – 240 с
13. Milovich A. Ya. Theory of dynamic interaction of bodies and liquids. - M-L.: Publishing house ONTI NKTP. - 240 p.
14. Никурадзе И. Закономерности турбулентного движения жидкостей в гладких трубах. // Сб. Проблемы турбулентности. – М-Л.: Изд-во ОНТИ НКТП, 1936. – С. 75 - 150.
14. Nikuradze I. Regularities of turbulent motion of liquids in smooth pipes. // Sb. Problems of turbulence. - M-L.: Publishing house ONTI NKTP, 1936. - Pp. 75-150.
15. Патрашев А.Н. Гидромеханика – М: Воениздат, 1953, – 720 с.
15. Patrashev A. N. Gidromekhanika-M: Voenizdat, 1953. - 720 p.
16. Прандтль Л. Гидроаэромеханика / Пер. с нем. – Ижевск, 2000. – 420 с.
16. Prandtl L. Gidroaeromehanika / Per. s. Nem. - Izhevsk, 2000. - 420 p.
17. Рабинович Е.З. Гидравлика – М.: ГИФМЛ, 1963. – 408 с.
17. Rabinovich E. Z. Hydraulika-M.: GIFML, 1963. - 408 p.
18. Роуч П.Дж. Вычислительная гидродинамика. –М.: Мир, 1980. – 712 с.
18. Roach P. J. Computational fluid dynamics. - M.: Mir, 1980 - 712 p.
19. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1975. – т.4. – 460 с.
19. Smirnov V. I. Course of higher mathematics. - M.: Nauka, 1975. - vol. 4. - 460 p.
20. Титиенс О. Гидро- и аэромеханика. По лекциям проф. Л. Прандтля. пер. с нем. – М. – Л.: ОНТИ, 1935. – т.2. – 400 с.
20. Titiens O. Hydro-and aeromechanics. According to the lectures of Prof. L. Prandtl. trans. from German-M.-L.: ONTI, 1935. - vol. 2. - 400 p.
21. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Пер. с англ. – М.: Мир, 1991, т.2., 552 с.
21. Fletcher K. Computational methods in fluid dynamics. Trans. from English-M.: Mir, 1991. vol. 2. - 552 p.
22. Чугаев Р.Р. Гидравлика. 4-е издание. – Л.: Энергоиздат, 1982. – 672 с.
22. Chugaev R. R. Hydraulics. 4th edition. - L.: Energoizdat, 1982. - 672 p.
23. Хинце И.О. Турбулентность, её механизм и теория. – М.: Физматгиз, 1963. – 680 с.
23. Khintse I. O. Turbulence, its mechanism and theory. - M.: Fizmatgiz, 1963. - 680 p.